ROZKLAD RACIONÁLNÍ FUNKCE NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

Př.: 1) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+4x-12}$

1. fce není ryzí ⇒ musíme rozložit na součet polynomu a ryzí racionální fce → čitatele vydělíme jmenovatelem

$$(x^2+x) : (x^2+4x-12) = 1$$
$$-(x^2+4x-12)$$
$$-3x+12$$

$$f(x) = 1 + \frac{12-3x}{x^2+4x-12}$$

→ polynom; → ryzí racionální fce $g(x)$

2. rozložíme jmenovatele $g(x)$ na součin kořenových činitelů

$$x^2+4x-12 = (x-2)(x+6)$$

3. obecný tvar rozkladu fce $g(x)$

$$\frac{12-3x}{(x-2)(x+6)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+6}$$

4. vypočteme konstanty A a B

$$\frac{12-3x}{(x-2)(x+6)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+6} \quad / \cdot (x-2)(x+6)$$

$$12-3x = A(x+6) + B(x-2)$$
$$12-3x = Ax + 6A + Bx - 2B$$
$$12-3x = (A+B)x + 6A - 2B$$

porovnáme koeficienty u všech mocnin proměnné x: ⊛

- x^1: $-3 = A + B$
- x^0: $12 = 6A - 2B \quad / :2$

$$-3 = A + B$$
$$6 = 3A - B \quad +$$
$$3 = 4A \Rightarrow A = \frac{3}{4}$$

$$B = -3 - A = -3 - \frac{3}{4} = -\frac{15}{4}$$

⊛ vždy dostaneme soustavu tolika rovnic, kolik je neznámých konstant; tato soustava má vždy právě jedno řešení

5. dosadíme konstanty → dostáváme výsledek

$$g(x) = \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{15}{4}}{x+6} = \frac{3}{4(x-2)} - \frac{15}{4(x+6)}$$ ... rozklad fce $g(x)$ na parciální zlomky

$$f(x) = 1 + \frac{3}{4(x-2)} - \frac{15}{4(x+6)}$$

2) $f(x) = \frac{3x^2+2x-3}{x^3-1}$

1. fce $f(x)$ je ryzí racionální fce

2. $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

3. $\frac{3x^2+2x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ $\quad / \cdot (x-1)(x^2+x+1)$

4. $3x^2+2x-3 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$
$3x^2+2x-3 = Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$
$3x^2+2x-3 = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A-C$

- x^2: $3 = A+B$ $\Rightarrow$ $B = 3-A = 3-\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$
- x^1: $2 = A-B+C$
- x^0: $-3 = A-C$ $\Rightarrow$ $C = 3+A = 3+\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$

$+$: $5 = 2A+C$
$-3 = A-C$ $/+$
$2 = 3A$ $\Rightarrow$ $A = \frac{2}{3}$

5. $f(x) = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{7}{3}x+\frac{11}{3}}{x^2+x+1} = \frac{2}{3(x-1)} + \frac{7x+11}{3(x^2+x+1)}$

3) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

1. fce $f(x)$ je ryzí racionální fce

2. $x^3-3x^2+3x-1 = (x-1)^3$

3. $\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$ $\quad / \cdot (x-1)^3$

4. $x^2+1 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$
$x^2+1 = Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C$
$x^2+1 = Ax^2+(-2A+B)x+A-B+C$

- x^2: $1 = A$
- x^1: $0 = -2A+B$ $\Rightarrow$ $B = 2A = 2 \cdot 1 = 2$
- x^0: $1 = A-B+C$ $\Rightarrow$ $C = 1-A+B = 1-1+2 = 2$

5. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$

Sami rozložte na parciální zlomky:

4) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^3+x}$

5) $f(x) = \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+4x+4}$

6) $f(x) = \frac{x+2}{x^3-2x^2}$

4) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^3+x} = \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ $/ \cdot x(x^2+1)$

tee je ryzí

$$x^2+3x+2 = Ax^2+A+Bx^2+Cx$$

- x^2: $1 = A + B \Rightarrow B = 1-A = 1-2 = -1$
- x^1: $3 = C$
- x^0: $2 = A$

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3-x}{x^2+1}$$

5) $f(x) = \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+4x+4} = x-2+\frac{5x+8}{x^2+4x+4}$

tee není ryzí

$$\begin{array}{l} (x^3+2x^2+x):(x^2+4x+4) = x-2 \\ -(x^3+4x^2+4x) \\ \hline -2x^2-3x \\ -(-2x^2-8x-8) \\ \hline 5x+8 \end{array}$$

$$\frac{5x+8}{x^2+4x+4} = \frac{5x+8}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \quad / \cdot (x+2)^2$$

$$5x+8 = Ax+2A+B$$

x^1: $5 = A$

x^0: $8 = 2A+B \Rightarrow B = 8-2A = 8-2\cdot 5 = -2$

$$f(x) = x-2+\frac{5}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$$

6) $f(x) = \frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$ $/ \cdot x^2(x-2)$

tee je ryzí

$$x+2 = Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2$$
$$x+2 = Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2$$

x^2: $0 = A + C \Rightarrow C = -A = -(-1) = 1$

x^1: $1 = -2A + B \Rightarrow A = \frac{1}{2}(B-1) = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$

x^0: $2 = -2B \Rightarrow B = -1$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$